يارب يا معين

/ /

توبولوجيا عامة 2017 - 2018 م

المحاضرة الثالثة عشر

- 12 م -

26 / 4 / 2018 م :

مبرهنة :

ليكن $f: X \to Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ تطبيقاً من الفضاء X إلى Y يكون التطبيق f مستمراً إذا وفقط إذا كانت جميع التطبيقات $\{p_\alpha \circ f\}_{\alpha \in I}$ مستمرة.

الإثبات :

⇐ لزوم الشرط :

لنفرض أن f تطبيق مستمر، جميع تطبيقات الإسقاط في α مستمرة حسب توبولوجيا الجداء، تركيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر إذاً $\{p \circ f\}_{\alpha \in I}$ مستمر

$$X \xrightarrow{f} Y = \prod_\alpha Y_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} Y_\alpha$$

⇒ كفاية الشرط

لنفرض أن جميع التطبيقات $\{p_\alpha \circ f\}_{\alpha \in I}$ مستمرة ولنأخذ $G \in I_\alpha$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الاعتيادي « Y_α » عندئذٍ :

$(p_\alpha \circ f)^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X

ولكن

$$(p_\alpha \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(p_\alpha^{-1}(G))$$

وهكذا نجد أن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة من عناصر قاعدة الجداء هي مجموعة مفتوحة في X، وهذا يكفي حتى تكون f مستمر ⇐

f مستمر

ولكن $p_\alpha^{-1}(G)$ هي من عناصر قاعدة الجداء.

مثال :

ليكن لدينا ؟ حيث :

$$R \to R^2$$

$$t \to (x(t), y(t))$$

/ /

فمثلاً معادلة الدائرة: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$

مثال:

ليكن لدينا التطبيق $R \to R^3$

فمثلاً: $[a,b] \to R^3$

معادلة اللولب: $(x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = c.t)$

طول اللولب

مثال:

ليكن لدينا التطبيق الآتي: $R^2 \to R^2$

$R^2 \to R^3$

فمثلاً معادلة الكرة:

$x = r\cos u \sin v$, $y = r\sin u \sin v$

$z = r\sin v$

* $\vec{r(t)} = (x(t), y(t), z(t))$ مستمرة إذا وفقط إذا كانت كل مركبة من احداثياتها مستمرة. ⟵ "مركبة مكانية"

ملاحظة:

نفرض $a_1 \in X_1$ نقطة ثابتة عندئذ المجموعة:

$a_1 \times X_2 = \{(a_1, x_2) ; x_2 \in X_2\}$

تشكل فضاءً جزئياً من فضاء الجداء

وهذا الفضاء الجزئي هو مورفيزم مكافئ هوميومورفياً للفضاء X_2

أي: $a_1 \times X_2 \sim X_2$

وبالمثل نجد أنه $X_1 \times a_2 \sim X_1$ حيث $a_2 \in X_2$ ثابتة

وهذا الشيء يمكن تعميمه الى فضاء الجداء بشكل عام.

أي: إن فضاء الجداء $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ - يحوي فضاءً جزئياً X' حيث ?

أنه هوميومورفياً للفضاء الإحداثي X'_δ ?

$(X'_\delta \sim X_\delta)$

$$a = (a_\alpha \in X)$$

$$X'_\delta = \{x \in X : x_\alpha = a_\alpha ,\ \forall \alpha = I \setminus \delta\}$$

ملاحظة:

إذا كانت $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ مجموعة جداء المجموعات

فإن لصاقة A تساوي جداء اللصاقات أي: $\bar{A} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$

موضوعات العد والفصل في الفضاءات التبولوجية

لاحظنا العمومية والتجريد في تعريف المفاهيم التبولوجية، وهذه العمومية أتاحت في عرض المفاهيم وتبسيط البراهين، ولكن حتى تأخذ نظرية المجموعات النقطية محتواها الهندسي كان لابد من وضع شروط إضافية على الفضاءات التبولوجية، وهذه الشروط تنقسم إلى نوعين:

النوع الأول: ذو طابع كمي له علاقة بعدد المجموعات المفتوحة والجوارات

النوع الثاني: " " كيفي " " بإمكانية فصل النقاط والمجموعات عن بعضها.

* موضوعات العد:

هناك فقط موضوعتان للعد، هما:

/ /

① موضوعة العد الأولى:
وهي أن كل نقطة من نقاط الفضاء التبولوجي تملك مجملة جوارات أساسية قابلة للعد.
((المجموعة القابلة للعد هي مجموعة منتهية أو غير منتهية، ولكن قابلة للعد تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية))
ونعني (قابلة للعد) أي مجموعة منتهية أو غير منتهية لكن قابلة للعد أي أنها تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية
• وبعض المؤلفين يعرفها بالشكل:
كل نقطة من نقاط الفضاء التبولوجي تملك مجملة جوارات أساسية قابلة للعد على الأكثر

مثال ١:
لنأخذ الفضاء التبولوجي المتقطع أي أن T - تبولوجيا متقطعة.
ولنفرض أن X غير منتهية غير قابلة للعد:
إن هذا الفضاء يحقق موضوعة العد أولى مهما كانت X لأنه أي نقطة من نقاطه تملك مجملة جوارات أساسية هي $\{\{x\}\}$ الأسرة المكونة من مجموعة وحيدة العنصر وهي المجموعة وحيدة العنصر x وبالتالي هي منتهية أي قابلة للعد حتى ولو كانت X غير منتهية.
مثال:
لو أخذنا $X = R$ فضاء تبولوجي. وكانت
$$T = \{u \subseteq R : 1 \in u\} \cup \{\phi\}$$
هو أيضاً يحقق موضوعة العد أول لأنه كل نقطة من نقاطه تملك جوارات أساسية هي $\{\{1, x\}\}$ وبالتالي أي جوار لـ x لا بد أنه يحوي الواحد و X

مثال:

الفضاء المتري هو فضاء محدود أول

لأن أي نقطة من نقاط x تملك حوله جوارات أساسية قابلة للعد وهي أسرة الكرات المفتوحة من الشكل:

$\{B(x,\frac{1}{n})\}_{n\in N}$

حيث n تمسح مجموعة الأعداد الطبيعية وهي قابلة للعد.

مثال:

فضاء المتممات المنتهية (X,τ) حيث X مجموعة غير قابلة للعد «أي مثل R مثلاً»

الفضاء ليس محدود أول لأن الفضاء لا يحقق موضوعة العد الأولى حيث R غير قابل للعد

الإثبات:

لنفرض جدلاً أنه يحقق الموضوعة الأولى أي لنأخذ النقطة $x\in R$ فإنه تملك جوارات أساسية قابلة للعد أي أنه $\{U_n\}_n$

هذه الجوارات جميعها مفتوحة، وتحوي x وهي من حالتنا هذه مجموعات مفتوحة ⟸ وبالتالي فإن المجموعة (X/U_1) منتهية ونسميها A_1 والمجموعة (X/U_2) منتهية ونسميها A_2 والمجموعة (X/U_n) منتهية ونسميها A_n وهكذا...

مع ملاحظة:

لو فرضنا أنه: $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ وهذه المجموعة A قابلة للعد

لأن اجتماع مجموعات منتهية، وهي مجموعة جزئية من X

والمجموعة $X\setminus A$ هي غير منتهية وغير قابلة للعد عندئذ يوجد فيها نقطة y مختلفة x فإن المجموعة $X\setminus\{y\}$ مفتوحة وتحوي x إذاً هي جوار لـ x

نتيجة هذا الجوار أنه لا تحوي أي من الجوارات $U_1,U_2,...,U_n$

/ /

وبالتالي هذا تناقض وبالتالي X لا يملك جملة اساسية قابلة للعد

② موضوعة العد الثانية:

هي ان يملك الفضاء الطبولوجي قاعدة قابلة للعد إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة يسمى فضاء معدود ثاني.

ينتج من هذين التعريفين:

ان موضوعة العد الاولى تنتج من الثانية أي ان كل معدود ثاني هو معدود أول والعكس غير صحيح.

علل ذلك: ؟!

من مبرهنة سابقة نقول ان:

B قاعدة للفضاء X $\Leftrightarrow$ $V = \{v \in B ,\ x \in v\}$

جملة اساسية لجوار x من اجل اي $x \in X$ "

فاذا كانت B قابلة للعد فأي جزء من اجزائها قابل للعد ومنه V قابلة للعد ← جملة اساسية لجوار x قابلة للعد ← معدود أول.

أمثلة:

① الفضاء الطبولوجي المتقطع (X, τ) حيث τ قوية و X غير قابلة للعد.

هذا الفضاء معدود أول لكن ليس معدود ثاني.

وذلك لأن اصغر قاعدة له $\{\{x\}\}_{x \in X}$ اسرة المجموعات الوحيدة العنصر وهي غير قابلة للعد لان X غير قابلة للعد.

② الفضاء الحقيقي R والفضاء R^2:

هو معدود ثاني لانه يملك قاعدة قابلة للعد وهي اسرة المجالات المفتوحة من الشكل $]a, b[$ حيث $a, b \in Q$

- كذلك الفضاء R^2 معدود ثاني لانه يملك قاعدة قابلة للعد وهي اسرة المستطيلات المفتوحة.

- انتهت المحاضرة الثانية عشر 12